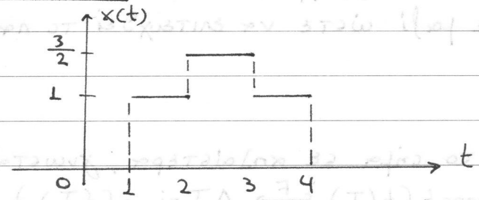
ΗΥ215 – Εφαρμοσμένα Μαθηματικά για Μηχανικούς — 22/3/2009 Φροντιστήριο

Μετασχηματισμός Fourier

Άσκηση 1η



Να βρεθεί ο Μ.F. του διπλανού σήματος.

Λύση: Για την εύρεση του Μ.F. του σήματος $x(t)$ που απεικονίζεται στο σχήμα, μπορούμε να εφαρμόσουμε πολλούς τρόπους. Ας δούμε μερικούς...

1ος τρόπος: Με τον ορισμό: $X(f)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt =$

$$= \int_1^4 x(t)e^{-j2\pi ft}\,dt = \int_1^2 1\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_2^3 \frac{3}{2}e^{-j2\pi ft}\,dt + \int_3^4 1\cdot e^{-j2\pi ft}\,dt =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_1^2 + \frac{3}{2}\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_2^3 + \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi ft}\Big]_3^4 =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j4\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j2\pi f} + \frac{1}{-j2\pi f}\frac{3}{2}e^{-j6\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}\frac{3}{2}e^{-j4\pi f} +$$

$$+ \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j8\pi f} - \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j6\pi f} =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j3\pi f}\left(e^{-j\pi f}-e^{j\pi f}\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j5\pi f}\left(e^{-j\pi f}-e^{j\pi f}\right) +$$

$$+ \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j7\pi f}\left(e^{-j\pi f}-e^{j\pi f}\right) =$$

$$= \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j3\pi f}\left(-2j\sin\pi f\right) + \frac{3}{2}\frac{1}{-j2\pi f}e^{-j5\pi f}\left(-2j\sin\pi f\right) +$$

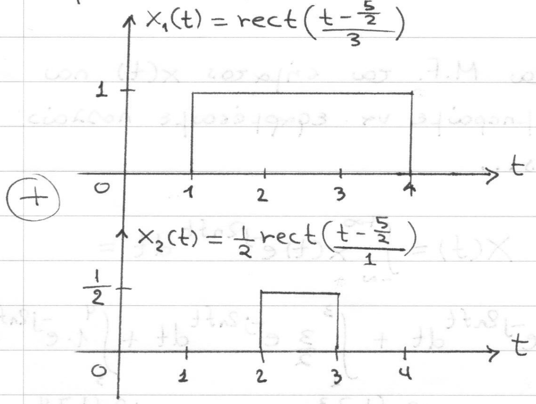
$$+ \frac{1}{-j2\pi f}e^{-j7\pi f}\left(-2j\sin\pi f\right) =$$

$$= \frac{\sin\pi f}{\pi f} \cdot e^{-3j\pi f} + \frac{3}{2}\frac{\sin\pi f}{\pi f} e^{-j5\pi f} + \frac{\sin\pi f}{\pi f} e^{-j7\pi f} =$$

$$= \mathrm{sinc}(f)\left(e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2}e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f}\right).$$

Παρατηρήστε τους όρους που βγάλαμε κοινό παράγοντα ώστε να εμφανιστούν τα $\sin\pi f$. Υπογραμμισμένα είναι τα εκθετικά που χρησιμοποιήσαμε μαζί ώστε να επιτευχθεί το παραπάνω.

2ος τρόπος: Αναλύοντας το σήμα σε απλούστερα, γνωστά σήματα: (Ξέρουμε ότι $A\mathrm{rect}(t/T) \xleftrightarrow{F} AT\mathrm{sinc}(fT)$)



$$\xrightarrow{F} X_1(f) = 3\,\mathrm{sinc}(3f) \cdot e^{-j2\pi f\frac{5}{2}} = 3\,\mathrm{sinc}(3f)\cdot e^{-j5\pi f}.$$

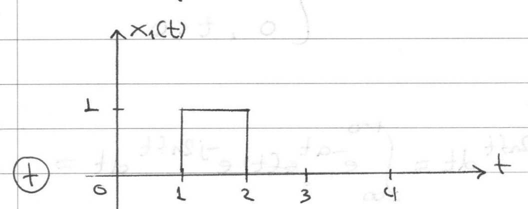
$$\xrightarrow{F} X_2(f) = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(f) \cdot e^{-j2\pi f\frac{5}{2}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{sinc}(f)\cdot e^{-j5\pi f}.$$

Παραπάνω, κάναμε χρήση της ιδιότητας $x(t-t_0) \longleftrightarrow e^{-j2\pi f t_0}X(f)$. Ο Μ.F. έχει την ιδιότητα της γραμμικότητας (δηλ. ισχύει ότι $\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \xleftrightarrow{F} \alpha X_1(f) + \beta X_2(f)$). Άρα θα είναι:

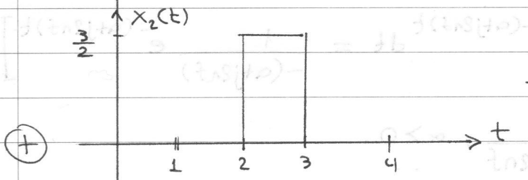
$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) = e^{-j5\pi f}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sinc}(f) + 3\,\mathrm{sinc}(3f)\right).$$

Παρατηρήστε ότι το αποτέλεσμα μοιάζει διαφορετικό από αυτό του 1ου τρόπου αλλά στην ουσία είναι το ίδιο. Αυτό μπορείτε να το επιβεβαιώσετε με το MATLAB ή κάνοντας πράξεις στο αποτέλεσμα του 1ου τρόπου.

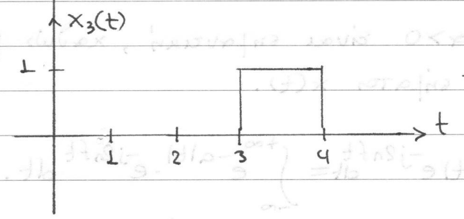
3ος τρόπος: Αναλύουμε το σήμα σε τρία σήματα, όμοια με το 2ο τρόπο



$$\xrightarrow{F} X_1(f) = \text{sinc}(f)\cdot e^{-j2\pi f\frac{3}{2}} = \text{sinc}(f)\cdot e^{-j3\pi f}.$$



$$\xrightarrow{F} X_2(f) = \frac{3}{2}\,\text{sinc}(f)\cdot e^{-j2\pi f\frac{5}{2}} = \frac{3}{2}\,\text{sinc}(f)\cdot e^{-j5\pi f}.$$



$$\xrightarrow{F} X_3(f) = \text{sinc}(f)\cdot e^{-j2\pi f\frac{7}{2}} = \text{sinc}(f)\cdot e^{-j7\pi f}.$$

Όμοια λοιπόν με το 2ο τρόπο, θα έχουμε:

$$X(f) = X_1(f) + X_2(f) + X_3(f) = \text{sinc}(f)\left(e^{-j3\pi f} + \frac{3}{2}e^{-j5\pi f} + e^{-j7\pi f}\right).$$

Το αποτέλεσμα είναι ίδιο με αυτό που προέκυψε με τον ορισμό, αλλά πολύ πιο εύκολα και πιο σύντομα! :) Υπάρχουν 1-2 τρόποι ακόμα που μπορείτε να "σπάσετε" το αρχικό σήμα σε απλούστερα (= με γνωστό M.F.). Χρησιμοποιείστε τη φαντασία σας! :)

<u>Άσκηση 2η:</u> Να βρεθούν οι Μ.F. των σημάτων:

α) $x(t) = e^{-at}\,\epsilon(t)$, $\alpha>0$ και $\epsilon(t) = \begin{cases} 1, & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$.

β) $x(t) = e^{-a|t|}$.

<u>Λύση:</u>

α) Είναι $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\epsilon(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+j2\pi f)t}\, dt = \frac{1}{-(a+j2\pi f)}\, e^{-(a+j2\pi f)t}\Big]_0^{+\infty} =$$

$$= 0 - \frac{1}{-(a+j2\pi f)}\, e^{0} = \frac{1}{a+j2\pi f}, \quad \alpha>0.$$

Προσέξτε ότι η συνθήκη $\alpha>0$ είναι σημαντική, καθώς μόνο τότε ορίζεται ο Μ.F. του σήματος $x(t)$.

β) <u>1ος τρόπος:</u> $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|}\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt.$

Το $x(t)$ γράφεται ως: $x(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at}, & t>0 \\ e^{+at}, & t<0 \end{cases}$ και

με χρήση της $\epsilon(t)$, είναι: $x(t) = e^{-at}\epsilon(t) + e^{at}\epsilon(-t)$.

Άρα θα είναι:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-at}\epsilon(t) + e^{at}\epsilon(-t)\right) e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\epsilon(t)\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{at}\epsilon(-t)\, e^{-j2\pi f t}\, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-at}\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt + \int_{-\infty}^{0} e^{at}\cdot e^{-j2\pi f t}\, dt = \left(\begin{array}{l} u=-t \\ du=-dt \\ u_1=0,\ u_2=+\infty \end{array}\right.$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-at-j2\pi f t}\, dt + \left(-\int_{+\infty}^{0} e^{-au}\cdot e^{j2\pi f u}\, du\right) =$$

$$\overset{\text{α)}}{\underset{\text{ερώτ.}}{=}} \frac{1}{a+j2\pi f} + \int_0^{+\infty} e^{-(a-j2\pi f)u}\, du =$$

$$= \frac{1}{a+j2\pi f} + \frac{1}{a-j2\pi f} = \frac{(a-j2\pi f)+(a+j2\pi f)}{(a+j2\pi f)(a-j2\pi f)} =$$

$$= \frac{2a}{a^2+4\pi^2 f^2}, \quad a>0.$$

2ος τρόπος: Είδαμε από τον 1ο τρόπο ότι το $x(t)$ γράφεται ως: $x(t) = e^{-at}\epsilon(t) + e^{at}\epsilon(-t)$. Αν $y(t) = e^{-at}\epsilon(t)$, τότε $y(-t) = e^{at}\epsilon(-t)$ και τότε $x(t) = y(t) + y(-t) =$
$= 2\,\frac{y(t)+y(-t)}{2} = 2\,Ev\{e^{-at}\epsilon(t)\} = 2y_e(t)$.

Γνωρίζουμε ότι για πραγματικά σήματα, το άρτιο μέρος τους έχει Μ.F. το πραγματικό μέρος του Μ.F. του σήματος. Δηλ. $y_e(t) \xleftrightarrow{F} Re\{y(t)\}$.

Άρα θα είναι $X(f) = 2Re\{y(t)\} = 2Re\{e^{-at}\epsilon(t)\} =$
$= 2Re\left\{\frac{1}{a+j2\pi f}\right\} = 2Re\left\{\frac{a-j2\pi f}{a^2+4\pi^2f^2}\right\} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$.

Σημείωση: Το $Ev\{\cdot\}$ συμβολίζει το άρτιο μέρος (even part).

Άσκηση 3η: Να βρεθεί ο Μ.F. του σήματος $x(t) = \frac{2}{1+t^2}$.

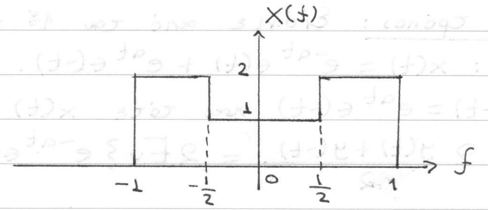
Λύση: Η λύση με τον ορισμό δεν συνίσταται... Θα κάνουμε χρήση του αποτελέσματος της άσκησης 2β και κάποιων γνωστών ιδιοτήτων. Ξέρουμε ότι αν $x(t) \xleftrightarrow{F} X(f)$, τότε $X(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$.

Είδαμε πριν ότι $e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{2a}{a^2+4\pi^2f^2}$. Για $a=2\pi$, είναι:

$e^{-2\pi|t|} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2\pi}\,\underline{\frac{2}{1+f^2}}$. Ο δεύτερος όρος του γινομένου του

Μ.F. μοιάζει πολύ με το σήμα στο χρόνο, του οποίου θέλουμε να βρούμε το Μ.F. Με χρήση λοιπόν της ιδιότητας $X(t) \xleftrightarrow{F} x(-f)$, θα έχουμε: $\frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} 2\pi\cdot e^{-2\pi|f|}$.

Άσκηση 4η: Υπολογίστε το $E=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$ για το σήμα που έχει Μ.Φ.



Λύση:

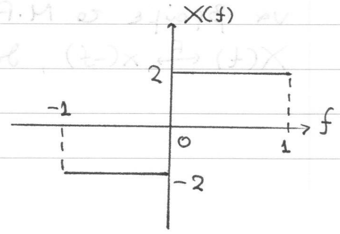
1ος τρόπος: Ένας τρόπος είναι να πάει κανείς να βρει το x(t) από το X(f). Αφού το X(f) αποτελείται από σήματα rect(·), τότε το x(t) θα αποτελείται από sinc(·) σήματα. Αν πάρουμε ότι $X(f)=2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f-\frac{3}{4}}{1}\right)+\mathrm{rect}\left(\frac{f}{1}\right)+$
$+\,2\,\mathrm{rect}\left(\frac{f+\frac{3}{4}}{1}\right) \xleftrightarrow{F^{-1}} x(t)=2\,\mathrm{sinc}(t)\cdot e^{j2\pi\frac{3}{4}t}+$
$+\,\mathrm{sinc}(t)+2\,\mathrm{sinc}(t)\cdot e^{-j2\pi\frac{3}{4}t}=$
$=\mathrm{sinc}(t)+2\,\mathrm{sinc}(t)\cdot 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)=$
$=\mathrm{sinc}(t)\left(1+4\cos\left(\frac{3}{2}\pi t\right)\right)$. Αφού φτάσαμε εδώ, πρέπει τώρα να βρούμε το $|x(t)|^2$ και μετά να προσπαθήσουμε να λύσουμε το ολοκλήρωμα. Αυτός ο τρόπος λύσης ΔΕΝ συνίσταται!

2ος τρόπος: Ξέρουμε ότι $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df$, το γνωστό θεώρημα του Parseval. Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το $\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df$, που είναι πολύ πιο εύκολο.

Είναι $\int_{-\infty}^{+\infty}|X(f)|^2\,df=2\int_{0}^{\frac{1}{2}}1^2\,df+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}2^2\,df=2\,\frac{1}{2}+8\cdot\frac{1}{2}=$

$=1+4=5 \Longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=5.$

Practice: Βρείτε το $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt$ για το:



(Απάντηση: $\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2\,dt=8$)